

# Technischer Bericht Nr. 11

Über die Bestimmung von biegekritischen Drehzahlen  
durch Modellversuche

I. Teil: Theoretische Grundlagen

Prof. Dr. phil. P. MATTHIEU

Dipl.-Phys. H. MEWES

## Technischer Bericht Nr. 11

### Ueber die Bestimmung von biegekritischen Drehzahlen durch Modellversuche

#### 1. Teil: Theoretische Grundlagen

##### Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, grundsätzlich und für den allgemeinen Fall die Möglichkeiten zu studieren, nach denen die biegekritischen Drehzahlen irgendwelcher Maschinenwellen durch Schwingungsmodellversuche ermittelt werden können. Dabei zeigt sich, daß es teils vermitteltst bisher bekannter Zusammenhänge, teils aufgrund von ganz neuen Gesichtspunkten und Wegen stets in einfacher Weise möglich ist, solche Modellversuche durchzuführen. Für die Praxis ergeben sich dadurch sehr brauchbare und leicht durchzuführende Methoden, um kritische Drehzahlen durch Modellversuche in kurzer Zeit zu ermitteln. Diese sind vor allem sehr vorteilhaft in komplizierten Fällen (Kreiselwirkung, mehrfache Lagerungen usw.), da dann die übrigen Methoden in der Regel versagen oder außerordentlich schwierig in der Durchführung sind.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

##### Die Bearbeiter

gez.: P. Matthieu

gez.: H. Mewes

(Prof. Dr. phil. P. Matthieu)

(Dipl.-Phys. H. Mewes)

Der Abteilungsleiter

Der Institutsdirektor

gez.: P. Matthieu

gez.: Rothert

(Prof. Dr. phil. P. Matthieu)

(Prof. Dr.-Ing. G. Rothert)

Berlin-Charlottenburg, den 2. Mai 1957

# Ueber die Bestimmung von biegekritischen Drehzahlen durch Modellversuche

## 1. Teil: Theoretische Grundlagen

### 1. Einleitung

Seit langer Zeit ist bekannt, daß die wichtige Aufgabe, die biegekritischen Drehzahlen einer gegebenen Maschinenwelle zu bestimmen, auf experimentellem Wege durch gewisse Modellversuche gelöst werden kann. Z. B. kann man stets ein im linearen Maßstab  $n$ -mal vergrößertes Modell einer Welle herstellen, wobei  $n$  eine beliebige positive Zahl ist, die im Falle eines verkleinerten Modells auch  $< 1$  sein kann. Die kritischen Drehzahlen des Modells sind dann  $\frac{1}{n}$ -mal so groß wie die der ursprünglichen Welle. Sie können auf experimentellem Wege bestimmt werden, indem man die Modellwelle in Umdrehungen versetzt und die Drehzahlen bestimmt, bei denen sie unruhig läuft. Trotz der Allgemeingültigkeit und der prinzipiellen Einfachheit dieser Zusammenhänge werden jedoch solche Umdrehungsversuche kaum ausgeführt, da die praktische Durchführung auf beträchtliche Schwierigkeiten stößt.

In zahlreichen Fällen, nämlich stets dann, wenn die Kreiselwirkung vernachlässigt werden darf, können die genannten Umdrehungsversuche mit einem maßstäblich  $n$ -mal vergrößerten Modell ersetzt werden durch Schwingungsversuche, was viel einfacher ist. Die biegekritischen Drehzahlen einer Welle stimmen dann nämlich überein mit ihren Biegeeigenfrequenzen. Man kann also durch einen Schwingungserreger veränderlicher Frequenz das Modell einer solchen Welle zu Schwingungen erregen und durch gleichzeitige Amplitudenmessung dessen Resonanzen bestimmen. Die Resonanzfrequenzen sind dann  $n$ -mal größer als die zugehörigen kritischen Drehzahlen der ursprünglichen Welle. In Abbildung 1 ist ein derartiger Modellversuch dargestellt.

In vielen Fällen - und zwar besonders bei hohen Umdrehungszahlen und wenn sich auf dem Rotor große scheibenförmige Teile befinden - darf jedoch die Kreiselwirkung nicht mehr vernach-

lässigt werden. Sie spielt besonders bei der heutigen Tendenz nach Erhöhung der Drehzahlen eine immer größer werdende Rolle. In diesem Fall führen die genannten Schwingungsversuche zu unrichtigen Resultaten. Unter Umständen können sich Abweichungen bis zu 50 % und mehr ergeben. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch eine neue Methode entwickelt, aufgrund der es möglich ist, durch gewisse abgeänderte Schwingungsversuche auch die Kreiselwirkung zu berücksichtigen.

Wieder andere Verhältnisse treten auf, wenn man - was meist viel praktischer ist - ein Modell herstellt, das in der Länge und in der Dicke verschiedene Reduktionsmaßstäbe aufweist. Wenn die Kreiselwirkung vernachlässigt werden darf, kann man wieder die ursprüngliche Problemstellung durch Schwingungsversuche ersetzen, und es gilt der Satz, daß ein Modell, das  $n$ -mal länger und  $m$ -mal dicker ist - wobei natürlich  $n$  und  $m$  wieder  $< 1$  sein können - ,  $\frac{m}{n^2}$ -mal schneller schwingt als die ursprüngliche Welle. In den häufigen Fällen, in denen die Kreiselwirkung berücksichtigt werden muß, gilt diese Schwingungsanalogie aber nicht mehr. Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte neue Methode gestattet jedoch, auch jetzt durch gewisse abgeänderte Schwingungsversuche zum Ziel zu kommen.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ergibt sich, daß kritische Drehzahlen stets nach klassischen Methoden und in einfacher Weise durch Schwingungsmodellversuche ermittelt werden können, wenn die Kreiselwirkung vernachlässigt werden darf. Auch bei komplizierten Wellen (mehrfache Lagerungen, fliegende Anordnungen usw.) wird die Theorie dieser Modellversuche erschöpfend beherrscht durch den bereits erwähnten Fundamentalsatz, daß ein  $n$ -mal längeres und  $m$ -mal dickeres Modell im Prinzip gleich, jedoch  $\frac{m}{n^2}$ -mal schneller schwingt. Wenn dagegen die Kreiselwirkung nicht mehr vernachlässigt werden darf, kommt man auf dem bisherigen Wege nicht mehr zum Ziel. Eine Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit besteht darin zu zeigen, wie man diese Schwierigkeit durch Heranziehung gewisser neuer Gesichtspunkte überbrücken kann.

Um solche Modellversuche zu einem in der Praxis leicht verwendbaren Verfahren auszugestalten, ist neben der erwähnten Schwierigkeit hinsichtlich der Kreiselwirkung noch ein zweiter Gesichtspunkt von ausschlaggebender Bedeutung: Solche Versuche müssen in technischer Hinsicht leicht und einfach durchführbar sein. Der am nächsten liegende Gedanke, das Modell einer Welle zu drehen, erweist sich bei näherer Prüfung meist als sehr umständlich. Ebenso ist es im allgemeinen nicht einfach, ein Modell zu gießen. Als zweite Hauptaufgabe ergibt sich also, nach Möglichkeiten zu suchen, wie solche Modelle leicht, einfach und rasch hergestellt und notfalls auch abgeändert werden können. Als brauchbarster Weg erweist sich dabei der Aufbau von Modellen durch Zusammenkleben aus einzelnen Teilen.

Diese beiden Hauptaufgaben, die Berücksichtigung der Kreiselwirkung bei Modellversuchen und die Ausbildung von einfachen Möglichkeiten für die Modellherstellung, bilden den wesentlichen Inhalt der vorliegenden Untersuchung. Durch ihre Lösung wird es möglich, für jede Maschinenwelle durch einfach durchzuführende Modellversuche die kritischen Drehzahlen zu bestimmen.

Erwähnt sei noch, daß sich die vorliegende Untersuchung beschränkt auf den üblichen Fall der kritischen Drehzahlen im Gleichlauf, während der praktisch kaum wichtige Fall des Gegenlaufs sowie weitere außergewöhnliche Fälle hier nicht in Betracht gezogen werden.

## 2. Zurückführung auf statische Betrachtungen.

Zur theoretischen Behandlung erweist es sich zunächst als vorteilhaft, die beiden auftretenden dynamischen Problemgruppen - es handelt sich einerseits um Eigenschwingungen, andererseits um kritische Drehzahlen - auf solche der Statik zurückzuführen. Es wird sich zeigen, daß das in beiden Fällen in einfacher Weise geschehen kann. Ferner setzen wir im folgenden eine Welle in der Art der Abb. 1 voraus, die einerseits aus biegsamen zylindrischen Wellenstücken  $B_k$  besteht (Wellenteile  $B_1, B_2, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$  in Abb. 1) sowie andererseits aus den dazwischenliegenden starren Stücken  $S_k$  (Wellenstücke  $S_3$  und  $S_9$  in Abb. 1). Die Welle kann

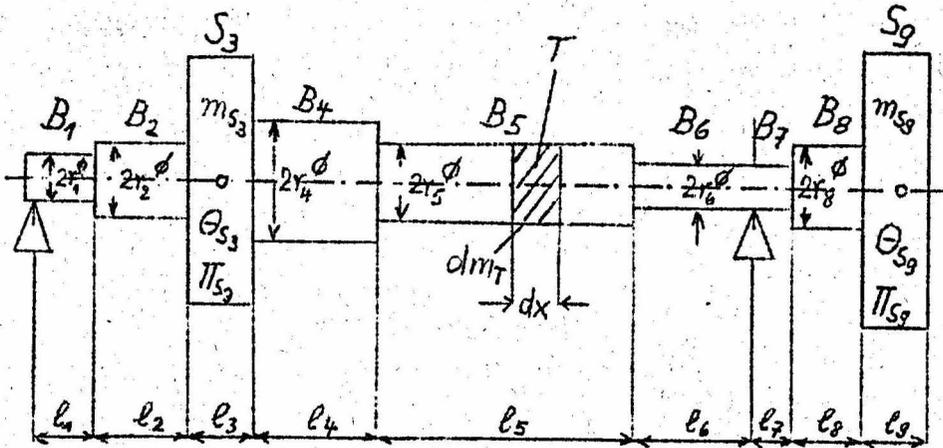


Abb. 1

auch mehrfach gelagert sein. Praktisch wird es sich zunächst darum handeln, eine gegebene Welle auf ein äquivalentes Ersatzsystem in der Art der Abb. 1 abzubilden. Für die Länge der einzelnen Abschnitte und die Radien der biegsamen Wellenteile  $B_k$  führen wir die aus Abb. 1 ersichtlichen Bezeichnungen ein. Ferner seien die Masse eines starren Teiles mit  $m_{S_k}$  bezeichnet sowie sein axiales und sein polares Trägheitsmoment mit  $\Theta_{S_k}$  bzw.  $\Pi_{S_k}$ . Für einen schmalen starren Teil gilt bekanntlich

$$\Pi_{S_k} = 2 \Theta_{S_k} \quad (1)$$

Weiterhin sei T ein auf einem beliebigen biegsamen Wellenteil  $B_k$  befindliches kleines Wellenstück von der Länge  $dx$  (in Abb. 1 liegt T im Abschnitt  $B_5$ ). Die Masse von T hat dann den Wert

$$dm_T = r_k^2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dx \quad (2)$$

wenn  $\rho$  die Dichte des Materials ist. In der Folge wird es sich darum handeln, alle biegsamen Teile  $B_k$  der Welle in lauter solche kleinen Teilstücke T einzuteilen. T ist also im biegsamen Gebiet der Welle als veränderlich anzusehen.

Wenn die Welle schließlich auf irgendeine Weise deformiert wird, bezeichnen wir die Auslenkung und die Neigung eines starren Teiles  $S_k$  durch  $y_{S_k}$  und  $y'_{S_k}$  (die erstere gemessen im Schwerpunkt von  $S_k$ ), während die Auslenkung von T durch  $y_T$  bezeichnet sei (Abb. 2).

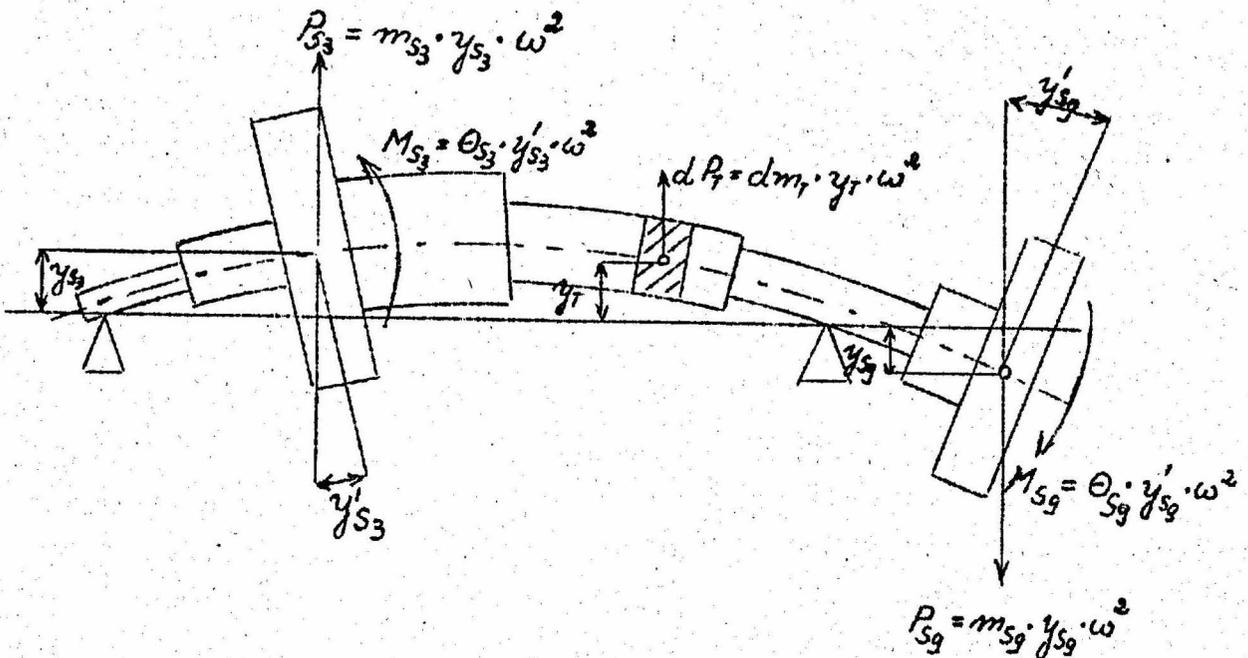


Abb. 2

Wir betrachten nun das folgende Eigenwertproblem: Durch irgendeine mechanische oder sonstige Vorrichtung möge bewerkstelligt werden, daß bei einer beliebigen Auslenkung der Welle an den starren Teilen  $S_k$  die äußeren Kräfte

$$P_{S_k} = m_{S_k} \cdot y_{S_k} \cdot \omega^2 \quad (3)$$

und die äußeren Momente

$$M_{S_k} = \Theta_{S_k} \cdot y'_{S_k} \cdot \omega^2 \quad (4)$$

angreifen (Abb. 2). Dabei ist  $\omega$  eine zunächst noch unbestimmte Konstante. Ferner möge auf das veränderliche Teilchen T die Kraft

$$dP_T = dm_T \cdot y_T \cdot \omega^2 \quad (5)$$

wirken (Abb. 2). Gesucht werden diejenigen Werte von  $\omega$  und diejenigen Auslenkformen, bei denen sich die Welle in einem (labilen) Gleichgewichtszustand befindet.

Dann ist sofort klar, daß die Lösungen dieses Eigenwertproblems übereinstimmen mit den Frequenzen und den Schwingungsformen der Eigenschwingungen der Welle; denn die Kräfte (3) und (5) stimmen überein mit den Trägheitskräften bei einer harmonischen Schwingung der Frequenz  $\omega$ , und nach bekannten Sätzen der elementaren Mechanik kann jedes bewegliche mechanische System in jeder Lage fixiert werden, wenn man äußere Kräfte von der Größe der jeweiligen Trägheitskräfte anbringt. Die Aufgabe, die Eigenschwingungen der Welle zu finden, kann also ersetzt werden durch das oben genannte statische Eigenwertproblem.

Noch einfacher liegen die Verhältnisse bei den biegekritischen Drehzahlen. Führt man ein Koordinatensystem ein, das mit der Welle rotiert, so treten in diesem Zentrifugalkräfte als statische Scheinkräfte auf, und die kritischen Drehzahlen sind die Umdrehungszahlen, bei denen Gleichgewichtszustände der Welle unter der Wirkung dieser Zentrifugalkräfte möglich sind.

Nach bekannten Formeln gelten für die Zentrifugalkräfte, die bei einer Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auftreten, auch die Formeln (3) und (5), während (4) nicht mehr gilt. Daß (4) nicht mehr richtig ist, erkennt man qualitativ schon daraus, daß, wie in der Abb. 3 angedeutet, die Zentrifugalkräfte bei einem scheibenförmigen starren Teil  $S_k$  ein aufstellendes Drehmoment zur Folge haben, also ein Moment, das die entgegengesetzte Richtung hat wie (4). Eine nähere Untersuchung<sup>1)</sup> zeigt, daß dieses neue Moment die Größe

---

1) Vgl. z. B.: Biezeno-Grammel, Technische Dynamik, 1. Aufl., Kap. 10, Nr. 9 (S. 803 ff)  
ferner: Collatz, Eigenwertaufgaben, 1. Kap., § 2, Nr. 6

$$M_{S_k} = - (\pi_{S_k} - \Theta_{S_k}) y'_{S_k} \cdot \omega^2 \quad (6)$$

hat (Abb. 3). Im Falle einer schmalen Scheibe tritt anstelle von (6) gemäß (1)

$$M_{S_k} = - \Theta_{S_k} \cdot y'_{S_k} \cdot \omega^2 \quad (7)$$

d. h., das auftretende Moment ist dem Betrage nach gleich, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzt wie (4). Neben den Momenten (6) bzw. (7) wirken, wie bereits erwähnt, auf die Welle noch Zentrifugalkräfte von den früheren Beträgen (3) und (5). Sie sind in Abb. 3 der Uebersicht wegen weggelassen.

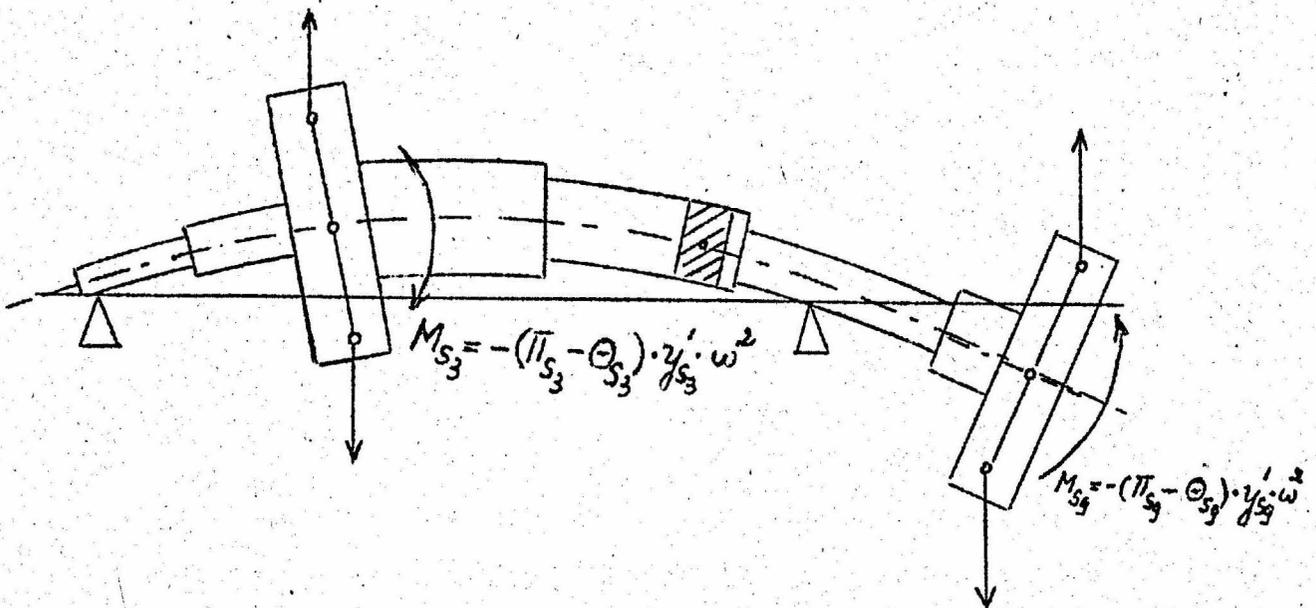


Abb. 3

Nach diesen Entwicklungen erscheinen die kritischen Drehzahlen und Auslenkformen als Lösungen eines ganz ähnlichen statischen Eigenwertproblems wie die Schwingungen. Der einzige Unterschied gegenüber dem auf Seite 5 formulierten Eigenwertproblem besteht darin, daß anstelle von (4) jetzt die Momente (6) bzw. (7) auftreten.

Damit ist also einerseits die Bestimmung der Eigenschwingungen einer Welle sowie andererseits die ihrer kritischen Dreh-

zahlen je auf ein statisches Eigenwertproblem zurückgeführt. Die beiden Eigenwertprobleme unterscheiden sich einzig in den auftretenden Momenten (4) bzw. (6) und (7). Daraus ergibt sich auch sofort die in Abschnitt 1 erwähnte fundamentale Tatsache, daß, wenn die Kreiselwirkung vernachlässigt werden darf, eine vollständige Analogie besteht zwischen den Schwingungen und den kritischen Drehzahlen einer Welle; denn dann verschwinden die Momente (4), (6) und (7), und die betreffenden Gleichungen stimmen ebenfalls überein.

### 3. Die Modellgesetze für Schwingungen und kritische Drehzahlen

Aus den Betrachtungen des letzten Abschnittes ergeben sich sofort die infrage kommenden Modellgesetze für die Schwingungen und kritischen Drehzahlen einer Welle. Wir betrachten dazu Abb. 4. Diese bezieht sich auf den Fall der Schwingungen. Die obere Figur zeigt eine Lösung des auf Seite 5 formulierten statischen Eigenwertproblems für die Schwingungen samt den dabei auftretenden Kräften und Momenten. Es werden dabei die gleichen Bezeichnungen verwendet wie im allgemeinen Fall der Abb. 2. Ferner sei der Eigenwert mit  $\omega$  und die Durchbiegungskurve mit  $y = f(x)$  bezeichnet. Nach den angestellten Ueberlegungen stellen diese letzteren Größen gleichzeitig auch die Frequenz und die Form einer Eigenschwingung dar.

Die untere Figur in Abb. 4 zeigt eine gegenüber der oberen  $n$ -mal verlängerte und  $m$ -mal verdickte Modellwelle. Diese hat außerdem eine modellähnliche Auslenkungsform, d. h., in den Koordinaten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  lautet die Gleichung der Durchbiegungskurve

$$\bar{y} = f\left(\frac{\bar{x}}{n}\right) = \bar{F}(\bar{x}) \quad (8)$$

wobei  $f$  die gleiche Funktion wie oben bedeutet, während  $\bar{F}$  als neue Funktion aufgrund von (8) definiert wird. Im folgenden koppeln wir die beiden unabhängigen Veränderlichen  $x$  und  $\bar{x}$  durch die Beziehung

$$\bar{x} = n \cdot x \quad (9)$$

d. h.,  $x$  und  $\bar{x}$  sollen nicht mehr beliebige, sondern modell-ähnlich gelegene Punkte der beiden Wellen darstellen. Dann läßt sich (8) unter Berücksichtigung von  $y = f(x)$  auch in der Gestalt schreiben:

$$\bar{y}(\bar{x}) = y(x) \quad (10)$$

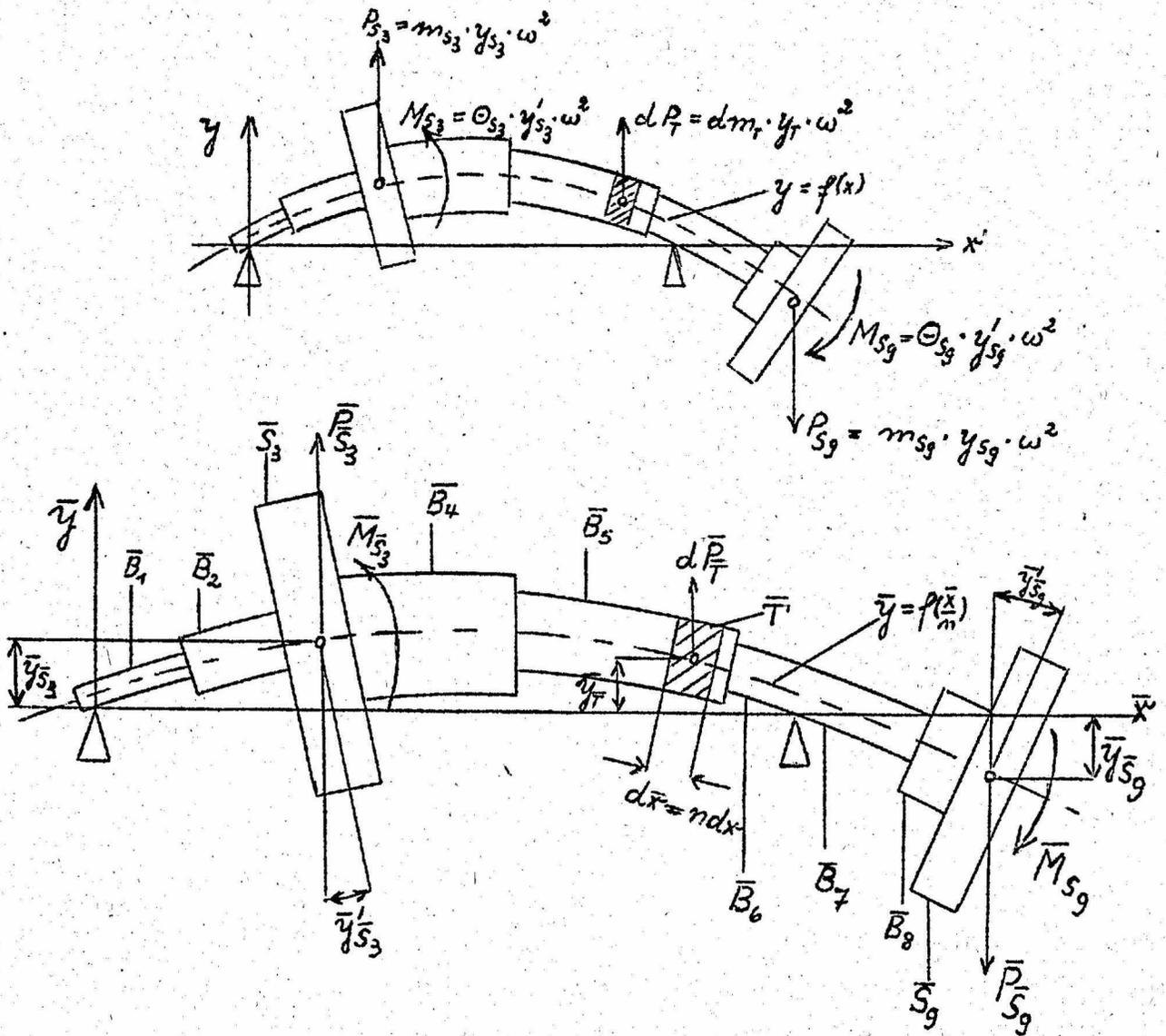


Abb. 4

Wir fragen nun nach den Kräften und Momenten, die nötig sind, um die Auslenkungen (8) bzw. (10) herzustellen, also nach den Werten von  $\bar{P}_{S_k}$ ,  $\bar{M}_{S_k}$  und  $d\bar{P}_T$ . Dabei soll grundsätzlich auch der Fall in Betracht gezogen werden, daß die Modellwelle aus einem anderen Material besteht. Dieses soll anstelle des ursprünglichen Elastizitätsmoduls  $E$  und der ursprünglichen Dichte  $\rho$  die neuen Konstanten  $\bar{E}$  und  $\bar{\rho}$  besitzen, wobei sich jedoch diese Festsetzungen nur auf die biegsamen Teile  $B_k$  und  $\bar{B}_k$  beziehen, während in den starren Teilen  $S_k$  und  $\bar{S}_k$ , die wir uns mit Einzelmassen und Einzelträgheitsmomenten behaftet denken, im folgenden  $E = \bar{E} = \infty$  und  $\rho = \bar{\rho} = 0$  gesetzt werden kann. Dagegen sind dann also in den Schwerpunkten der Teile  $S_k$  und  $\bar{S}_k$  die genannten Einzelmassen und Einzelträgheitsmomente anzubringen. Schließlich seien die Querschnittsflächen und das Flächenträgheitsmoment der ursprünglichen und der Modellwelle mit  $q(x)$ ,  $I(x)$  bzw.  $\bar{q}(\bar{x})$ ,  $\bar{I}(\bar{x})$  bezeichnet, wobei diese Funktionen naturgemäß unstetig sind. In den starren Teilen, die wir uns, wie oben festgesetzt, an sich masselos und nur mit Einzelmassen und Einzelträgheitsmomenten behaftet denken, können wir im folgenden z. B. überall  $q(x) \equiv 1$ ,  $\bar{q}(\bar{x}) \equiv m^2$ , ferner  $I(x) \equiv 1$ ,  $\bar{I}(\bar{x}) \equiv m^4$  setzen. Dann gelten aufgrund von (9) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}(\bar{x}) &= m^2 \cdot q(x) \\ \bar{I}(\bar{x}) &= m^4 \cdot I(x) \end{aligned} \right\} (11)$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß die superponierte Durchbiegungskurve (8) bzw. (10) der Modellwelle unter den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{S_k} &= \frac{\bar{E}}{E} \frac{m^4}{n^3} P_{S_k} \\ \bar{M}_{S_k} &= \frac{\bar{E}}{E} \frac{m^4}{n^2} M_{S_k} \\ d\bar{P}_T &= \frac{\bar{E}}{E} \frac{m^4}{n^3} dP_T \end{aligned} \right\} (12)$$

entsteht; denn wenn wir im folgenden das Biegemoment der ursprünglichen Welle mit  $B(x)$  und das der Modellwelle mit  $\bar{B}(\bar{x})$  bezeichnen, folgt aus (12) unter Berücksichtigung von (9)

$$\bar{B}(\bar{x}) = \frac{\bar{E}}{E} \frac{m^4}{n^2} B(x) \quad (13)$$

Weiterhin ergibt sich aus (13) aufgrund der Beziehungen (11) und der beiden Stabdurchbiebungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} y''(x) &= \frac{B(x)}{E \cdot I(x)} \\ \bar{y}''(\bar{x}) &= \frac{\bar{B}(\bar{x})}{\bar{E} \cdot \bar{I}(\bar{x})} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

die Beziehung

$$\bar{y}''(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} y''(x) \quad (15)$$

Aus dieser letzteren folgen schließlich durch Integration unter Berücksichtigung von (9) und den Randbedingungen die beiden Gleichungen

$$\bar{y}'(\bar{x}) = \frac{1}{n} y'(x) \quad (16)$$

$$\bar{y}(\bar{x}) = y(x) \quad (17)$$

womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

In den Ausdrücken (12) kann man noch für  $P_{S_k}$ ,  $M_{S_k}$  und  $dP_T$  die in Abb. 4 eingezeichneten Werte einsetzen. Ferner folgt aus (16) und (17)

$$y_{S_k} = \bar{y}_{S_k} ; \quad y'_{S_k} = n \cdot \bar{y}'_{S_k} ; \quad y_T = \bar{y}_T \quad (18)$$

und schließlich gilt für die Masse  $d\bar{m}_{\bar{T}}$  des modellähnlich gelegenen Teilchens  $\bar{T}$  der Modellwelle entsprechend (2)

$$d\bar{m}_{\bar{T}} = \bar{r}_k^2 \cdot \pi \cdot \bar{\rho} \cdot d\bar{x} = m^2 \cdot n \frac{1}{\rho} dm_T \quad (19)$$

Setzt man die Ausdrücke (18) und (19) neben den oben genannten Werten für  $P_{S_k}$ ,  $M_{S_k}$  und  $dP_T$  in (12) ein, so folgen die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{S_k} &= \frac{\bar{E}}{E} \frac{m^4}{n^3} m_{S_k} \cdot \bar{y}_{S_k} \cdot \omega^2 \\ \bar{M}_{S_k} &= \frac{\bar{E}}{E} \frac{m^4}{n} \Theta_{S_k} \cdot \bar{y}_{S_k}^{\perp} \cdot \omega^2 \\ d\bar{P}_T &= \frac{\bar{E}}{E} \frac{g}{g} \frac{m^2}{n^4} \bar{y}_T \cdot d\bar{m}_T \cdot \omega^2 \end{aligned} \right\} (20)$$

oder mit

$$\bar{\omega} = \frac{m}{n^2} \sqrt{\frac{\bar{E} \cdot g}{E \cdot g}} \omega \quad (21)$$

die entsprechenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{S_k} &= \frac{\bar{e}}{e} \frac{m^2}{n} m_{S_k} \cdot \bar{y}_{S_k} \cdot \bar{\omega}^2 \\ \bar{M}_{S_k} &= \frac{\bar{e}}{e} \frac{m^2}{n^3} \Theta_{S_k} \cdot \bar{y}_{S_k}^{\perp} \cdot \bar{\omega}^2 \\ d\bar{P}_T &= d\bar{m}_T \cdot \bar{y}_T \cdot \bar{\omega}^2 \end{aligned} \right\} (22)$$

In diesen Formeln sind  $\bar{y}_{S_k}$ ,  $\bar{y}_{S_k}^{\perp}$  und  $\bar{y}_T$  zunächst bestimmte, sich aus der ursprünglichen Kurve  $y = f(x)$  ergebende Werte. Da aber die Größen  $\bar{P}_{S_k}$ ,  $\bar{M}_{S_k}$  und  $d\bar{P}_T$  in (22) diesen Werten proportional sind, ist die Modellwelle auch im Gleichgewicht, wenn man  $\bar{y}_{S_k}$ ,  $\bar{y}_{S_k}^{\perp}$  und  $\bar{y}_T$  in (22) mit irgendeinem konstanten Faktor multipliziert. Nehmen wir also an, daß (ganz entsprechend dem auf Seite 5 formulierten Eigenwertproblem) bei einer Ausbiegung der Modellwelle die Kräfte und Momente (22) auftreten, so liegt ein zum ursprünglichen modellähnliches Eigenwertproblem vor, dessen Eigenwerte und Eigenfunktionen gemäß (21) und (8) bzw. (10) mit den ursprünglichen zusammenhängen.

Um die Analogie vollständig zu machen, nehmen wir noch an, daß die Teile  $\bar{S}_k$  der Modellwelle die Massen

$$\bar{m}_{S_k} = \frac{1}{g} n \cdot m^2 \cdot m_{S_k} \quad (23)$$

und die Trägheitsmomente

$$\bar{\Theta}_{S_k} = \frac{1}{g} n^3 \cdot m^2 \cdot \Theta_{S_k} \quad (24)$$

besitzen, und daß auch ihre Schwerpunkte modellähnlich zu denen der ursprünglichen Welle liegen. Dann schreiben sich die Kräfte und Momente (22) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{S_k} &= \bar{m}_{S_k} \cdot \bar{y}_{S_k} \cdot \bar{\omega}^2 \\ \bar{M}_{S_k} &= \bar{\Theta}_{S_k} \cdot \bar{y}_{S_k} \cdot \bar{\omega}^2 \\ d\bar{P}_{T} &= d\bar{m}_{T} \bar{y}_{T} \bar{\omega}^2 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Damit ist die Analogie vollständig hergestellt. Wir nehmen also an, daß zu der ursprünglichen Welle ein  $n$ -mal verlängertes und  $m$ -mal verdicktes Modell aus anderem Material konstruiert sei. Dabei sollen jedoch für die Massen und Trägheitsmomente der starren Teile  $\bar{S}_k$  die Formeln (23) und (24) gelten, und deren Schwerpunkte sollen modellähnlich zu denen der ursprünglichen Welle liegen. Im übrigen kommt es auf die Form der starren Teile nicht an. Entsprechend Seite 5 nehmen wir weiterhin an, daß aufgrund von irgendwelchen Mechanismen bei einer Auslenkung der Modellwelle die Kräfte und Momente (25) auftreten und stellen das Eigenwertproblem, diejenigen Werte für  $\bar{\omega}$  und diejenigen Auslenkformen zu finden, bei denen sich die Welle in einem (labilen) Gleichgewicht befindet. Dann ergibt sich also aufgrund unserer Betrachtung, daß die beiden Eigenwertprobleme modellähnlich sind. Die zu ihnen gehörigen Eigenwerte hängen gemäß (21) und die Eigenfunktionen gemäß (8) bzw. (10) zusammen, wobei bei den letzteren natürlich noch ein konstanter Ueberhöhungsfaktor hinzutreten kann.

Genau entsprechende Aehnlichkeitsbetrachtungen gelten auch hinsichtlich des auf Seite 67 ausgesprochenen statischen Eigenwertproblems für die kritischen Drehzahlen. Hierbei tritt im allgemeinen beim ursprünglichen Problem anstelle von (4) die Gleichung (6). Aufgrund davon ergibt sich durch eine völlig parallele Ableitung anstelle von (24) die Forderung

$$(\bar{\pi}_{S_k} - \bar{\Theta}_{S_k}) = \frac{\bar{\rho}}{\bar{g}} n^3 \cdot m^2 \cdot (\bar{\pi}_{S_k} - \bar{\Theta}_{S_k}) \quad (26)$$

und damit anstelle der zweiten Beziehung (25) die Gleichung

$$\bar{M}_{S_k} = - (\bar{\pi}_{S_k} - \bar{\Theta}_{S_k}) \cdot \bar{y}_{S_k}^+ \cdot \bar{\omega}^2 \quad (27)$$

Der einzige Unterschied der kritischen Drehzahlen gegenüber den Schwingungen besteht also im allgemeinen darin, daß es anstelle der axialen Trägheitsmomente  $\Theta_{S_k}$  bzw.  $\bar{\Theta}_{S_k}$  jetzt auf die Differenzen  $(\bar{\pi}_{S_k} - \bar{\Theta}_{S_k})$  bzw.  $(\bar{\pi}_{S_k} - \bar{\Theta}_{S_k})$  des polaren und des axialen Trägheitsmomentes ankommt.

In dem wichtigen und häufigen Fall, daß die aufgesetzten Massen lauter schmale Scheiben sind, reduzieren sich die Gleichungen (26) und (27) auf

$$\bar{\Theta}_{S_k} = \frac{\bar{\rho}}{\bar{g}} n^3 \cdot m^2 \cdot \Theta_{S_k} \quad (28)$$

$$\bar{M}_{S_k} = -\bar{\Theta}_{S_k} \cdot \bar{y}_{S_k}^+ \cdot \bar{\omega}^2 \quad (29)$$

d. h., man kommt bis auf das Vorzeichen in (29) auf den früheren Fall zurück.

Nach den Betrachtungen des 2. Abschnittes können wir diese Resultate schließlich noch in die Sprache der Schwingungslehre bzw. der kritischen Drehzahlen übertragen. Es ergeben sich dann sofort die folgenden Hauptresultate:

Zu einer gegebenen Welle, die aus einem Material mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Dichte  $\rho$  besteht, sei ein  $n$ -mal verlängertes und  $m$ -mal verdicktes Modell konstruiert aus

einem neuen Material mit den bezüglichen Konstanten  $\bar{E}$  und  $\bar{\rho}$  (Abb. 4). Dabei kommt es auf die genaue Form der starren Teile  $\bar{S}_k$  nicht an, sondern nur auf die richtige (d. h. modellähnliche) Lage ihrer Schwerpunkte. Ferner sollen für die starren Teile  $S_k$  und  $\bar{S}_k$  die Beziehungen gelten:

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_{S_k} &= \frac{10^9}{g} \cdot n \cdot m^2 \cdot m_{S_k} \\ \bar{\Theta}_{S_k} &= \frac{10^9}{g} \cdot n^3 \cdot m^2 \cdot \Theta_{S_k} \end{aligned} \right\} (30)$$

Dann schwingen die beiden Wellen modellähnlich, und zwar schwingt das Modell

$$\lambda = \sqrt{\frac{\bar{E}}{E} \cdot \frac{g}{g}} \cdot \frac{m}{n^2} \quad (31)$$

-mal rascher als die gegebene Welle.

Im Falle der kritischen Drehzahlen müssen unter sonst gleichbleibenden Verhältnissen anstelle von (30) im allgemeinen die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_{S_k} &= \frac{10^9}{g} \cdot n \cdot m^2 \cdot m_{S_k} \\ (\bar{\Pi}_{S_k} - \bar{\Theta}_{S_k}) &= \frac{10^9}{g} \cdot n^3 \cdot m^2 \cdot (\Pi_{S_k} - \Theta_{S_k}) \end{aligned} \right\} (32)$$

gefordert werden. Sind diese erfüllt, so besteht wieder Modellähnlichkeit zwischen den biegekritischen Zuständen der gegebenen Welle und denen des Modells, und die kritischen Drehzahlen des letzteren liegen wieder  $\lambda$ -mal (Gleichung (31)) höher als die der gegebenen Welle.

In dem wichtigen Spezialfall dagegen, daß es sich um lauter schmale Scheiben handelt, geht die untere Gleichung (32) über in:

$$\bar{\Theta}_{S_k} = \frac{10^9}{g} \cdot n^3 \cdot m^2 \cdot \Theta_{S_k} \quad (33)$$

Durch diese Sätze werden die Modellähnlichkeitsverhältnisse sowohl bei den Schwingungen als auch bei den kritischen Drehzahlen in erschöpfender Weise erfaßt. Es ergibt sich aus ihnen genau, wie ein Modell konstruiert werden muß, damit es sich entweder schwingungstechnisch oder biegekritisch modellähnlich zur gegebenen Welle verhält. Dabei bestehen bei der Herstellung des Modells noch zahlreiche Freiheiten. Zunächst können die Konstanten  $m$  und  $n$  sowie das Material des Modells beliebig gewählt werden. Ferner brauchen die starren Teile nur den Forderungen (30) bzw. (32) zu genügen, was bei ihrer Herstellung noch zahlreiche Möglichkeiten offen läßt.

Auf diese Weise ist es also möglich, ein Modell je nach dem vorliegenden Fall irgendwelchen Verhältnissen anzupassen. Im allgemeinen - jedoch nicht immer - wird man von einer gegebenen Welle ein kürzeres und dünneres Modell herstellen, d. h.,  $n$  und  $m$  sind dann beide  $< 1$ . Ferner wird es stets vorteilhaft sein, das Modell aus einem leicht bearbeitbaren Material herzustellen. Oft kommt es schließlich bei der Wahl eines Modells in erster Linie darauf an, daß dessen Frequenzen in einem günstigen Bereich liegen. Dann ist dieser letztere Gesichtspunkt für die Konstruktion des Modells ausschlaggebend.

#### 4. Die Analogie zwischen Schwingungen und biegekritischen Drehzahlen einer Welle

Im letzten Abschnitt wurden die Modellgesetze behandelt, wie sie für die Schwingungen und die biegekritischen Drehzahlen einer Welle gelten. Demgegenüber sollen im vorliegenden Abschnitt die Analogien besprochen werden, wie sie zwischen den beiden Erscheinungsgruppen als solchen, den Schwingungen einerseits und den biegekritischen Drehzahlen andererseits, zu Recht bestehen. Schon in Abschnitt 1 wurde die fundamentale Tatsache erwähnt, daß, wenn die Kreiselwirkung vernachlässigt werden kann, eine vollständige Analogie besteht zwischen den Schwingungen und den biegekritischen Drehzahlen einer Welle. Die Eigenfrequenzen und die Eigenschwingungsformen stimmen dann genau überein mit den kritischen Drehzahlen und Auslenkformen. Mathematisch ergibt sich diese Analogie sofort aus den Betrachtungen von Abschnitt 2.

Denn die Schwingungen erscheinen als Lösungen des auf Seite 5 ausgesprochenen, die kritischen Drehzahlen dagegen als Lösungen des auf Seite 6f formulierten Eigenwertproblems. Wie dies bereits auf Seite 7 erörtert wurde, stimmen die beiden Eigenwertprobleme überein bis auf die Momente (4) und (6) bzw. (7). Wenn die Kreiselwirkung vernachlässigt werden darf, fallen jedoch diese Momente weg, und es besteht eine vollständige Übereinstimmung zwischen den beiden Gleichungssystemen. Das ist der mathematische Ausdruck der genannten Analogie. Die beiden an sich verschiedenen Erscheinungen der Biegeschwingungen und der biegekritischen Drehzahlen ohne Kreiselwirkung werden beschrieben durch dasselbe Gleichungssystem.

Nicht mehr so einfach liegen die Verhältnisse, wenn die Kreiselwirkung berücksichtigt werden muß. Dann verschwinden die Momente (4) und (6) bzw. (7) nicht mehr, und die beiden Gleichungssysteme stimmen nicht mehr überein. Es besteht also auch keine direkte Analogie mehr. Wir werden jedoch zeigen, wie sich dieser Fall durch eine Erweiterung der bisherigen Analogie erfassen läßt. Diese Erweiterung führt zu gewissen abgeänderten Schwingungsversuchen, durch die es möglich wird, auch den Einfluß der Kreiselwirkung, wenigstens in einer gewissen Näherung, zu berücksichtigen.

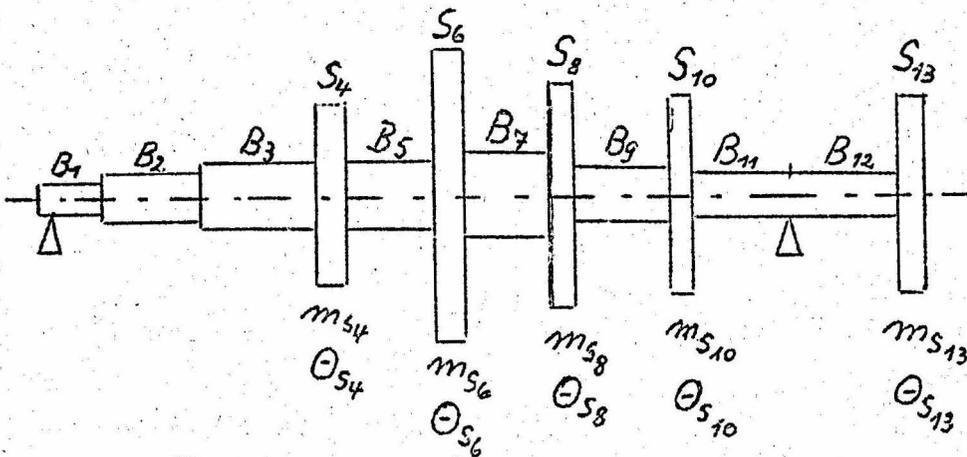
Besonders einfach liegen die Verhältnisse, wenn die starren Teile  $S_k$  des Rotors dünne Scheiben sind. Dieser Fall soll deshalb zuerst betrachtet werden. Er kann auch in der Mehrzahl der praktischen Fälle angenommen werden, und eine besondere Behandlung rechtfertigt sich also auch aus diesen Gründen. Nach den eben dargelegten Betrachtungen werden die Schwingungen einer solchen Welle charakterisiert durch das auf Seite 5 ausgesprochene Eigenwertproblem mit den Gleichungen (3) bis (5), die kritischen Drehzahlen dagegen durch das auf Seite 6f formulierte, das sich vom ersten einzig dadurch unterscheidet, daß (4) durch (7) zu ersetzen ist. D. h. also, daß im hier zugrunde gelegten Fall von lauter dünnen Scheiben die beiden Eigenwertprobleme zwar nicht gleich sind, daß sie sich aber in verhältnismäßig geringfügiger Weise einzig im Vorzeichen der Momente (4) und (7) unterscheiden.

Darauf läßt sich nun in folgender Weise eine Methode zur Berücksichtigung der Kreiselwirkung gründen: Wir denken uns zu der ursprünglich gegebenen Welle  $W$  (Abb. 5 oben) eine leicht abgeänderte Variante  $W^{\ddot{x}}$  konstruiert (Abb. 5 unten), für deren Teile und Größen die gleichen Bezeichnungen verwendet werden sollen, wie bei der ursprünglichen Welle  $W$ . Der Unterschied von  $W^{\ddot{x}}$  gegenüber  $W$  soll einzig und allein darin bestehen, daß die Massen  $m_{S_k}$  der starren Teile  $S_k$ , die bei  $W$  eine räumliche Ausdehnung haben, bei  $W^{\ddot{x}}$  als punktförmig (im Schwerpunkt) angenommen werden. Die Massen  $m_{S_k}$  haben also bei  $W$  und  $W^{\ddot{x}}$  die gleichen Werte, während für die Trägheitsmomente  $\Theta_{S_k}$  bei der Welle  $W^{\ddot{x}}$  die Beziehungen

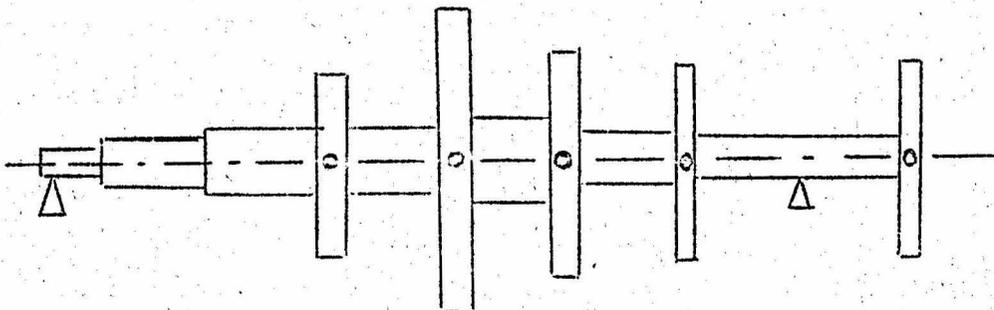
$$\Theta_{S_k} = 0 \quad (34)$$

bestehen.

Gegebene Welle  $W$



Variante  $W^{\ddot{x}}$



$$m_{S_k} \text{ wie bei } W$$

$$\Theta_{S_k} = 0$$

Abb. 5

Wir betrachten nun wieder die Schwingungen der Welle  $W^*$ . Diese werden wieder durch ein Eigenwertproblem charakterisiert, welches im wesentlichen mit den beiden bisherigen übereinstimmt und sich von diesen nur dadurch unterscheidet, daß anstelle von (4) bis (7) entsprechend (34) die Gleichungen

$$M_{S_k} = 0 \quad (35)$$

bestehen.

Damit liegen nun also drei Eigenwertprobleme vor: Eines für die Schwingungen der ursprünglichen Welle  $W$ , eines für die Schwingungen der abgeänderten Welle  $W^*$  (Abb. 5) und eines für die kritischen Drehzahlen der ursprünglichen Welle. Alle drei stimmen überein bis auf die Beträge der äußeren Momente. Für diese letzteren gelten, in nochmaliger Uebersicht zusammengestellt, die folgenden Formeln:

a.) Schwingungen der ursprünglichen Welle  $W$ :

$$M_{S_k} = \Theta_{S_k} \cdot y'_{S_k} \cdot \omega^2 \quad (36)$$

b.) Schwingungen der Variante  $W^*$ :

$$M_{S_k} = 0 \quad (37)$$

c.) Kritische Drehzahlen der ursprünglichen Welle  $W$ :

$$M_{S_k} = -\Theta_{S_k} \cdot y'_{S_k} \cdot \omega^2 \quad (38)$$

Wenn wir vom mittleren Fall der Variante  $W^*$  ausgehen, so kommt bei den Schwingungen der ursprünglichen Welle noch der zusätzliche Einfluß der Momente (36) hinzu, der die Frequenzen erniedrigt. Ein gleich großer Einfluß tritt gemäß (38) bei den kritischen Drehzahlen mit dem umgekehrten Vorzeichen, also in erhöhendem Sinne, auf. Es ergibt sich also, daß, wenn wir vom

mittleren Fall ausgehen, eine gleich große zusätzliche Wirkung, das eine Mal im einen (erniedrigenden), das andere Mal im umgekehrten (erhöhenden) Sinne, hinzukommt. Mathematisch handelt es sich um die Variation eines Parameters, der in erster Ordnung eine proportionale Änderung der von ihm abhängenden Größen zur Folge hat.

Daraus folgt, daß in erster Annäherung die Schwingungsfrequenzen der Welle  $W$  gegenüber denen von  $W^{\#}$  um den gleichen Betrag tiefer liegen, um den die kritischen Drehzahlen von  $W$  höher liegen. Bezeichnet also  $\omega_k$  die  $k$ -te Eigenfrequenz der ursprünglichen Welle  $W$ ,  $\omega_k^{\#}$  diejenige der Welle  $W^{\#}$  und schließlich  $\Omega_k$  die  $k$ -te kritische Drehzahl von  $W$ , so gilt in erster Annäherung

$$\Omega_k - \omega_k^{\#} = \omega_k^{\#} - \omega_k \quad (39)$$

oder

$$\Omega_k = 2 \omega_k^{\#} - \omega_k \quad (40)$$

Setzen wir schließlich

$$\omega_k^{\#} - \omega_k = \Delta \omega_k \quad (41)$$

so kann man (40) auch in der Form

$$\Omega_k = \omega_k + 2 \cdot \Delta \omega_k \quad (42)$$

oder

$$\Omega_k = \omega_k^{\#} + \Delta \omega_k \quad (43)$$

schreiben.

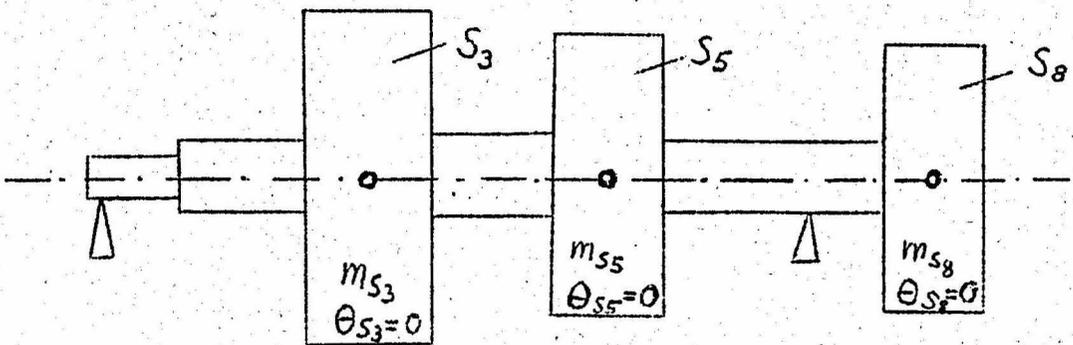
Damit ist die hier entwickelte Methode zur Berücksichtigung der Kreiselwirkung im Prinzip und für den einfachsten Fall scheibenförmiger Teile  $S_k$  aufgestellt. Sie besteht im wesentlichen in der Anwendung der Formeln (40) bis (43). Durch diese ist es

möglich, vermitteltst einer leicht abgeänderten zusätzlichen Welle  $W^{\#}$  und zugehörige Schwingversuche die biegekritischen Drehzahlen einer Welle auch unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung in erster Annäherung zu ermitteln. In der überwiegenden Mehrzahl der praktischen Fälle ist der Einfluß der Kreiselwirkung nicht sehr groß. Bei der Grundschwingung einer Welle beträgt er in der Regel einige wenige Prozente, während er bei den höheren Biegekritischen anwächst. Für die allermeisten Anwendungen ist also die genannte Näherung erster Ordnung völlig ausreichend, umsomehr, als meist von anderen Seiten her viel größere Ungenauigkeiten hinzukommen. Als ein gewisser Normwert kann wohl angenommen werden, daß die Formeln (40) bis (43) für praktische Zwecke unbedenklich verwendet werden können, wenn die Erhöhung durch die Kreiselwirkung nicht mehr als etwa 10 % ausmacht, wenn also die zu einer Frequenz  $\omega_k$  gehörige Differenz  $\Delta\omega_k$  nicht mehr als etwa 10 % von  $\omega_k$  beträgt.

Falls sich größere Abweichungen ergeben, können die Formeln (40) bis (43) zwar nicht mehr als genau gelten, hingegen sind sie trotzdem noch sehr gut in qualitativem Sinne verwendbar. Es kann zwar nicht mehr der genaue Wert einer kritischen Drehzahl berechnet werden, aber es können sehr weitgehende Schlüsse auf deren ungefähre Lage gezogen werden, was meist völlig genügt. Schließlich ist es auch möglich, die bisher verwendete Näherung erster Ordnung durch eine solche höherer Ordnung zu ersetzen. In der vorliegenden Arbeit soll aber nicht darauf eingegangen werden.

Bisher wurde der besonders einfache Fall schmaler Scheiben vorausgesetzt, der auch in der Praxis in der Regel angenommen werden kann. Der allgemeine Fall läßt sich aber in ganz entsprechender Weise behandeln. Maßgebend sind jetzt die Gleichungen (6), die anstelle von (7) treten. Man überlegt sich leicht, daß zur Erfassung des allgemeinen Falles zwei Varianten  $W^{\#}$  und  $W^{\#\#}$  der ursprünglichen Welle nötig sind. Diese sind in Abb. 6 dargestellt. Für ihre Teile und Größen werden wieder die gleichen Bezeichnungen verwendet, wie bei der ursprünglichen Welle. Die starren Teile der Welle sind jetzt nicht mehr scheibenförmig.

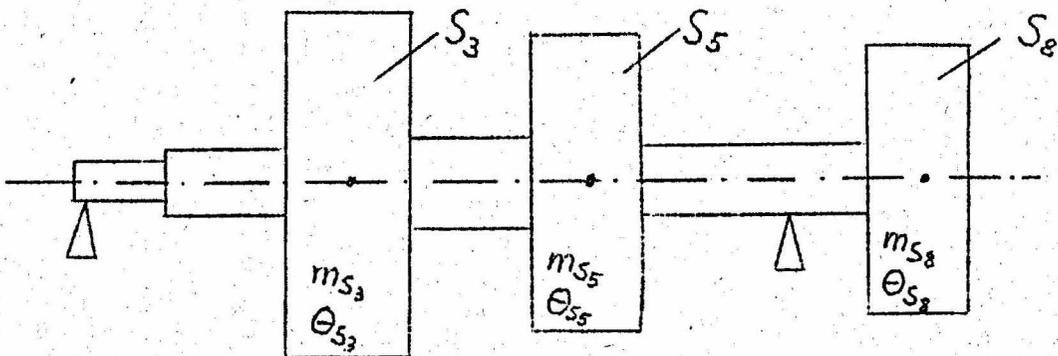
Variante  $W^*$



$$m_{S_k} = \text{wie bei } W$$

$$\Theta_{S_k} = 0$$

Variante  $W^{**}$



$$m_{S_k} = \text{wie bei } W$$

$$\Theta_{S_k} = \pi_{S_k} - \Theta_{S_k}$$

Abb. 6

Was zunächst die Variante  $W^*$  betrifft (Abb. 6), so stimmt sie vollständig überein mit der früheren Variante  $W^*$ . Ihre wesentliche Eigenschaft besteht darin, daß die Massen der starren Teile als punktförmig angenommen werden. Die Variante  $W^{**}$  dagegen (Abb. 6) hat zwar die gleichen Massen  $m_{S_k}$  wie die ursprüngliche Welle, hingegen andere Trägheitsmomente. Die axialen Trägheitsmomente  $\Theta_{S_k}$  bei  $W^{**}$  sollen nämlich gleich groß

sein wie die bezüglichen Differenzen  $\Pi_{S_k} - \Theta_{S_k}$  bei der ursprünglichen Welle. Im Falle schmaler Scheiben ergibt sich, daß  $W^{xxx}$  mit  $W$  übereinstimmt.

Wir betrachten nun wieder einerseits die Schwingungen von  $W^{xxx}$  und  $W^x$  sowie andererseits die kritischen Drehzahlen der ursprünglichen Welle  $W$ . Jede dieser Aufgaben führt auf ein Eigenwertproblem, und die drei Eigenwertprobleme unterscheiden sich wieder nur in den äußeren Momenten. Entsprechend (36) bis (38) ergibt sich dabei die folgende Uebersicht:

a.) Schwingungen der Variante  $W^{xxx}$ :

$$M_{S_k} = (\Pi_{S_k} - \Theta_{S_k}) \cdot y'_{S_k} \cdot \omega^2 \quad (44)$$

b.) Schwingungen der Variante  $W^x$ :

$$M_{S_k} = 0 \quad (45)$$

c.) Kritische Drehzahlen der ursprünglichen Welle  $W$ :

$$M_{S_k} = - (\Pi_{S_k} - \Theta_{S_k}) \cdot y'_{S_k} \cdot \omega^2 \quad (46)$$

Damit liegen aber völlig analoge Verhältnisse vor wie im früheren Fall, und die kritischen Drehzahlen in der Welle  $W$  lassen sich wieder in erster Annäherung linear extrapolieren aus den Schwingungen der Wellen  $W^x$  und  $W^{xxx}$ .

Bezeichnen wir wie früher die kritischen Drehzahlen von  $W$  durch  $\Omega_k$  und die Eigenfrequenzen von  $W^x$  durch  $\omega_k^x$  sowie entsprechend die Eigenfrequenzen von  $W^{xxx}$  durch  $\omega_k^{xxx}$ , so gelten in völliger Analogie zu (40) bis (43) die Gleichungen:

$$\Omega_k = 2 \omega_k^x - \omega_k^{xxx} \quad (47)$$

$$\omega_k^x - \omega_k^{xxx} = \Delta \omega_k \quad (48)$$

$$\Omega_k = \omega_k^{xxx} + 2 \cdot \Delta \omega_k \quad (49)$$

$$\Omega_k = \omega_k^x + \Delta \omega_k \quad (50)$$

Damit sind wir am Ziel. Auch für den allgemeinen Fall wurde damit dargelegt, wie man durch Herstellung zweier Varianten  $W^{\times}$  und  $W^{\times\times}$  und zugehörige Schwingungsversuche die biegekritischen Drehzahlen einer Welle versuchsmäßig bestimmen kann. Für den Fall schmaler Scheiben gehen natürlich diese allgemeinen Betrachtungen wieder in die früheren über.

Nach den bisherigen Entwicklungen sieht es so aus, als ob zur Durchführung dieser Methoden stets zwei Wellen nötig sind. Bei schmalen Scheiben waren dies die Wellen  $W$  und  $W^{\times}$ , im allgemeinen Fall die Wellen  $W^{\times\times}$  und  $W^{\times}$ . Da die beiden in Frage stehenden Wellen sich aber nur in den Trägheitsmomenten der starren Teile  $S_k$  unterscheiden, kann man sie leicht in der Art von Abb. 7 in eine einzige Versuchswelle  $W^{\times\times\times}$  zusammenfassen.

Gestalt der Variante  $W^{\times\times\times}$ :

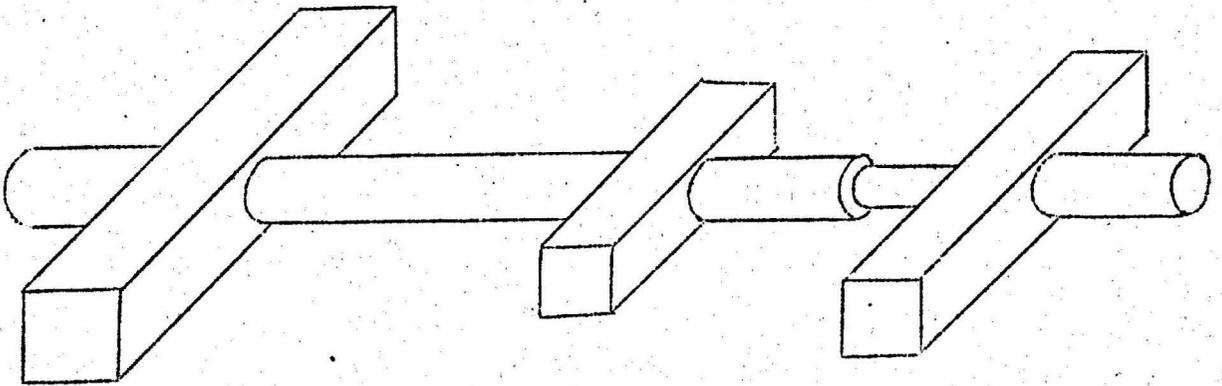


Abb. 7

Die starren Teile  $S_k$  von  $W^{\times\times\times}$  haben in zwei zueinander senkrechten Richtungen verschiedene Trägheitsmomente, und diese entsprechen im Falle von lauter schmalen Scheiben den Trägheitsmomenten von  $W$  und  $W^{\times}$ , im allgemeinen Fall dagegen denen von  $W^{\times\times}$  und  $W^{\times}$ . Demgemäß müssen jetzt mit der Welle  $W^{\times\times\times}$  Schwingversuche in zwei zueinander senkrechten Richtungen durchgeführt werden, aus denen sich dann in genau gleicher Weise wie bisher die biegekritischen Drehzahlen der ursprünglichen Welle  $W$  ergeben. Die Konstruktion der Welle  $W^{\times\times\times}$  ist wohl so klar, daß auf Einzelheiten nicht eingegangen werden soll.

Eine weitere Bemerkung betrifft den Umstand, daß die Trägheitsmomente der Welle  $W^{\#}$  theoretisch genau gleich Null sein müßten. Praktisch wird sich das zwar nicht genau, aber doch mit großer und fast immer genügender Annäherung erreichen lassen. Jedoch ist noch hervorzuheben, daß diese Forderung gar nicht unbedingt nötig ist, daß man sich also ohne weiteres von ihr befreien kann. Z. B. kann man im Falle schmaler Scheiben für die Variante  $W^{\#}$  anstelle von (37) die Forderung

$$M_{S_k} = \frac{1}{3} \Theta_{S_k} \cdot y'_{S_k} \cdot \omega^2 \quad (51)$$

aufstellen, d. h., die Massen  $m_{S_k}$  werden nicht mehr als punktförmig angenommen, vielmehr besitzen sie eine endliche, durch (51) charakterisierte Ausdehnung. Dann ist der einzige Unterschied der, daß anstelle von (39) bis (43) wiederum auf Grund linearer Interpolation die Gleichungen treten:

$$\Omega_k - \omega_k^{\#} = 2 \cdot (\omega_k^{\#} - \omega_k) \quad (52)$$

$$\Omega_k = 3 \cdot \omega_k^{\#} - 2 \cdot \omega_k \quad (53)$$

$$\omega_k^{\#} - \omega_k = \Delta \omega_k \quad (54)$$

$$\Omega_k = \omega_k + 3 \cdot \Delta \omega_k \quad (55)$$

$$\Omega_k = \omega_k^{\#} + 2 \cdot \Delta \omega_k \quad (56)$$

Durch diese können also die kritischen Drehzahlen  $\Omega_k$  in absolut analoger Weise wie früher berechnet werden, ohne daß die Trägheitsmomente der starren Teile von  $W^{\#}$  zu Null gemacht werden müssen.

Damit sind die in Frage stehenden Analogien zwischen Schwingungen und kritischen Drehzahlen in allen Stücken besprochen. Es bleibt noch zu bemerken, daß bei der Durchführung von solchen Versuchen natürlich auch die im letzten Abschnitt entwickelten Gesichtspunkte der Modellähnlichkeit heranzuziehen sind. Man wird also von den Wellen  $W$ ,  $W^{\#}$ ,  $W^{\#\#}$  und  $W^{\#\#\#}$  geeignete Modelle herstellen und die Schwingversuche mit diesen durchführen.